

文章编号: 0529-6579(2000)01-0005-04

一类 Hardy 空间的分子刻划^{*}

邱道文

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要: 基于各种等价的离散 Hardy 空间 $H^p(\mathbf{Z})$, 进一步讨论其原子分解. 定义离散 Hardy 空间 $H^{p, q, s_0}(\mathbf{Z})$ ($0 < p \leq 1 \leq q < \infty$, $p < q$) 并证明它们相互等价. 然后, 给出 $\mathbf{Z}$ 上的分子概念并建立其分子刻划定理.

关键词: Hardy 空间; 原子; 分子; 离散 Hilbert 变换

中图分类号: O174.1 **文献标识码:** A

Coifman 等^[1] 用原子分解的思想将 $\mathbf{R}^n$ 上的 Hardy 空间扩张到更一般的齐型空间上. 由于齐型空间的一般性, 其上原子的定义^[1] 没有高阶消失矩, 因而只有当 p 接近 1 时, 原子 Hardy 空间 $H^p(X)$ 才有意义. 整数集 $\mathbf{Z}$ 是一类特殊的齐型空间, 文[1] 利用离散 Hilbert 变换定义了 $H^1(\mathbf{Z})$, 即 $a \in H^1(\mathbf{Z})$ 当且仅当 $a \in l^1(\mathbf{Z})$ 且 $H^d a \in l^1(\mathbf{Z})$, 其中, $H^d a(m) = \sum_{k \in \mathbf{Z}, k \neq m} a(k) / (m-k)$, $m \in \mathbf{Z}$. 文[2] 把此定义推广到了 $0 < p < 1$ 的情形. 此前, Sun^[3] 利用离散面积函数给出了 $H^p(\mathbf{Z})$ 的刻划. 最近, Boza 等^[4] 用离散 Poisson 核 $P_t^d(\mathbf{n}) = t / (t^2 + \mathbf{n}^2)$ 和一类 Schwartz 函数分别定义离散 Hardy 空间, 并证明它们与文[2, 3] 中的 $H^p(\mathbf{Z})$ 皆相互等价. 特别地, 文[4] 用文[1] 中原子分解的思想, 定义 (p, ∞, s_0) 原子及离散 Hardy 空间 $H_{at}^p(\mathbf{Z})$ ($s_0 = [1/p - 1]$, 下同), 建立了 $H^p(\mathbf{Z})$ 的原子等价刻划. 分子理论由 Taibleson 等^[5] 系统而完整地建立, 它对讨论算子的有界性具有重要的作用. 本文沿用文[4] 记号.

1 $H^p(\mathbf{Z})$ 的原子分解

定义 1^[4] 设 $0 < p \leq 1$, 由离散 Hilbert 变换和离散 Poisson 核定义的离散 Hardy 空间为: $H_{Hilb}^p(\mathbf{Z}) = \{a \in l^1(\mathbf{Z}); H^d a \in l^1(\mathbf{Z})\}$ 和 $H_{max}^p(\mathbf{Z}) = \{a \in l^1(\mathbf{Z}); \sup_{t>0} P_t^d * a \in l^1(\mathbf{Z})\}$, 其中, $P_t^d * a(\mathbf{n}) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \frac{t}{t^2 + (\mathbf{n}-m)^2} a(m)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}$. 相应的 P -模是

$\|a\|_{H_{Hilb}^p(\mathbf{Z})} = \|a\|_p + \|H^d a\|_p$ 和 $\|a\|_{H_{max}^p(\mathbf{Z})} = \|a\|_p + \|\sup_{t>0} P_t^d * a\|_p$. Boza 等^[4] 证

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19631080); 中山大学高等学术研究中心基金资助项目

收稿日期: 1999-03-08; 作者简介: 邱道文(1967~), 男, 博士.

明了 $H_{\text{Hilb}}^p(\mathbf{Z}) = H_{\text{max}}^p(\mathbf{Z})$, 并记为 $H^p(\mathbf{Z})$. Plancherel 等^[4] 证明了 H^d 是 $l^p(\mathbf{Z})$ 到 $l^p(\mathbf{Z})$ 有界的. Auscher 等^[7] 证明了 $\| \sup_{\mathbf{t} \in \mathbf{Z}} \mathbf{P}_{\mathbf{t}}^d * \mathbf{a} \|_{l^p(\mathbf{Z})} \leq C \| \mathbf{a} \|_{l^p(\mathbf{Z})}$.

定义 2^[4] 设 $0 < p \leq 1$, 称 $\mathbf{a} = \{\mathbf{a}(\mathbf{n})\}_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}}$ 是 $\mathbf{Z}$ 中的 H^p 原子, 若满足条件: ① $\text{supp } \mathbf{a}$ 包含了 $\mathbf{Z}$ 中一基数为 $2n+1$ 的球中, $n \geq 1$; ② $\| \mathbf{a} \|_{\infty} \leq (2n+1)^{-1/p}$; ③ $\sum_{\mathbf{n}} n^{\alpha} \mathbf{a}(\mathbf{n}) = 0$, $0 \leq \alpha \leq s_0$, 且 $\alpha \in \mathbf{N}$.

$$H_{\text{at}}^p(\mathbf{Z}) = \left\{ \mathbf{a}; \mathbf{a} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j \text{ 为 } H^p \text{ 原子且 } \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p < \infty \right\},$$

$$\| \mathbf{a} \|_{H_{\text{at}}^p(\mathbf{Z})} = \inf \left\{ \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p \right)^{1/p} \right\}, \text{ 对所有 } \mathbf{a} \text{ 的可能分解.}$$

这里的 H^p 原子就是 (p, ∞, s_0) 原子. 文^[4] 证明了 $H^p(\mathbf{Z}) = H_{\text{at}}^p(\mathbf{Z})$.

定义 3 设 $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, 且 $p < q$, 称 $\mathbf{a} = \{\mathbf{a}(\mathbf{n})\}_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}}$ 是 $\mathbf{Z}$ 中的 (p, q, s_0) 原子, 若满足:

- ① $\text{supp } \mathbf{a} \subset B$, B 为 $\mathbf{Z}$ 中基数为 $2n+1$ 的球, $n \geq 1$; ② $\| \mathbf{a} \|_q \leq (2n+1)^{1/q-1/p}$; ③ $\sum_{\mathbf{n}} n^{\alpha} \mathbf{a}(\mathbf{n}) = 0$, $0 \leq \alpha \leq s_0$.

离散 Hardy 空间 $H^{p, q, s_0}(\mathbf{Z})$ 定义为

$$H^{p, q, s_0}(\mathbf{Z}) = \left\{ \mathbf{a}; \mathbf{a} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j \text{ 是 } (p, q, s_0) \text{ 原子, 且 } \sum |\lambda_j|^p < \infty \right\},$$

$$\| \mathbf{a} \|_{H^{p, q, s_0}(\mathbf{Z})} = \inf \left\{ \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p \right)^{1/p} \right\}, \text{ 其下确界对所有可能分解而取.}$$

定理 1 设 $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p < q$, 则 $H^{p, q, s_0}(\mathbf{Z}) = H_{\text{at}}^p(\mathbf{Z})$. 其中模等价.

证明 由于 $H_{\text{at}}^p(\mathbf{Z}) = H_{\text{max}}^p(\mathbf{Z})$. 所以只需证任意 (p, q, s_0) 原子 $\mathbf{a}$ 的 $H_{\text{max}}^p(\mathbf{Z})$ 模被一常数控制. 证明需用到前文所述的一些结果及 Poisson 核的性质, 由于篇幅所限, 此略.

2 几个引理

定义 4 p, q 如定义 1 所设, 记 $\epsilon \geq 1/p-1$, $\mathbf{a} = 1-1/p+\epsilon$, $\mathbf{b} = 1-1/q+\epsilon$.

称 $\mathbf{M} = \{\mathbf{M}(\mathbf{n})\}_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}}$ 为中心在 $\mathbf{n}_0$ 的 (p, q, s_0, ϵ) 分子, 若满足

- ① $\| \mathbf{M} \|_{q^{\mathbf{a}} \mathbf{b}} \| \cdot - \mathbf{n}_0 \|_{\mathbf{b}}^{\mathbf{M}}(\cdot) \|_{q^{\mathbf{a}} \mathbf{b}} < \infty$; ② $\sum_{\mathbf{n}} n^{\alpha} \mathbf{M}(\mathbf{n}) = 0$, $0 \leq \alpha \leq s_0$.

令条件 ① 左边的数为 $\mathbf{M}$ 的范数, 记为 $N^d(\mathbf{M})$.

引理 2 若 $\mathbf{a}$ 是 (p, q, s_0) 原子, 则 $\mathbf{a}$ 必为 (p, q, s_0, ϵ) 分子, 且 $N^d(\mathbf{a}) \leq C$.

其中, $\epsilon \geq 1/p-1$, C 仅依赖于 p, q . (证明思想与 $\mathbf{R}^n$ 的情况类似, 此略.)

引理 3 若 $\mathbf{M}$ 是 (p, q, s_0) 分子, 则 $\mathbf{M} \in l^p(\mathbf{Z})$.

证明 不妨设 $\mathbf{M}$ 中心为 0. 利用 $b_{pq} > q-p$, 下式及分子定义知引理成立,

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}} |\mathbf{M}(\mathbf{n})|^p = \sum_{|\mathbf{n}| \leq k_0} |\mathbf{M}(\mathbf{n})|^p + \sum_{|\mathbf{n}| > k_0} |\mathbf{M}(\mathbf{n})|^p \leq$$

$$C(k_0, p, q) \| \mathbf{M} \|_q^p + C \| \cdot \|_{\mathbf{b}}^{\mathbf{M}}(\cdot) \|_q^p$$

引理 4^[8] 设 M 是以 n_0 为中心的 (p, q, s_0, ϵ) 分子, $\Phi \in L^q(\mathbf{R})$, 且 $\text{supp } \Phi \subset \{x \in \mathbf{R}; |x| < N\}$. 令 $f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} M(n) \Phi(x-n)$, 则 f 是 $\mathbf{R}$ 上以 n_0 为中心的 (p, q, s_0, ϵ) 分子^[3], 且 $N(f) \leq CN^d(M)$, 其中 $N(f)$ 表示 f 在 $\mathbf{R}$ 上的分子模, C 仅与 p, q, s_0, ϵ 和 Φ 有关.

引理 5 设 $k \in \mathbf{Z}$ 且 $0 < p \leq 1/k$, M 为 (p, q, s_0, ϵ) 分子. k 为偶数时, 令 $d_k(m) = \sum_{j=1+[(2k-3)/4]}^{[(2k-3)/4]} M(m-j) \int_{j-1/4}^{j+3/4} B_k(y) dy$, $m \in \mathbf{Z}$; k 为奇数时, 令 $d_k(m) = \sum_{j=1+[(2k-1)/4]}^{[(2k-1)/4]} M(m-j) \int_{j-1/4}^{j+1/4} B_k(y) dy$, $m \in \mathbf{Z}$. 则 $d_k(m) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i a_{i,k}(m)$. 其中, $B_k(x) = B_1 * \dots * B_1(x)$, B_1 是 $[-1/2, 1/2]$ 上的特征函数, $(\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p)^{1/p} \leq CN^d(M)$, 且 $a_{i,k}$ 满足: ① 存在 $\mathbf{Z}$ 中的球 B_i 使得 $\text{supp } a_{i,k} \subset B_i$; ② $\|a_{i,k}\|_{\infty} \leq 1/(\#B)^{1/p}$; ③ $\sum_{m \in \mathbf{Z}} m^j a_{i,k}(m) = 0$, $0 \leq j \leq k-1$.

证明 设 k 为奇数, 令 $f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} M(n) \chi_{[n-1/4, n+1/4)}(x)$, 由引理 4, f 为 $\mathbf{R}$ 上的 (p, q, s_0, ϵ) 分子且 $\|f\|_{H^p(\mathbf{Z})} \leq c_1 N(f) \leq c_2 N^d(M)$, 其中第 1 个不等式用到文[5]中的定理 2.9, 由于 $M \in l^p(\mathbf{Z})$ (引理 3), 易知 $f \in L^2(\mathbf{R})$ 因此存在 $\mathbf{R}$ 上的 (p, ∞, s_0) 原子列 $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$, 使得 $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i b_i(x)$, a. e. $x \in \mathbf{R}$, 其中, $(\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p)^{1/p} \leq c N^d(M)$. 其余证明同文[4]中的引理 3.12 的证明一样, 此略.

3 主要结果

定理 2 设 $k \in \mathbf{Z}$ 且 $0 < p \leq 1/k$, M 为离散 (p, q, s_0, ϵ) 分子, 则 $M(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i a_{i,k}(n)$, 其中, $(\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p)^{1/p} \leq c N^d(M)$, 且 $a_{i,k}$ 满足引理 5 中所述的 ① ~ ③.

证明 施归纳法于 k , $k=1$ 时, 由引理 5 知结论成立. 假设结论对 $k-1$ 时成立, 往证对 k 时也成立. 由假设, 如果 M 是 (p, q, s_0, ϵ) 分子且 $0 < p \leq 1/k < 1/(k-1)$, 则 $M(m) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i a_{i,k-1}(m)$, 其中, $(\sum_{i=0}^{\infty} |\mu_i|^p)^{1/p} \leq c N^d(M)$, 且 $a_{i,k-1}$ 满足:

① 存在球 $B_{i,k-1} \subset \mathbf{Z}$ 使得 $\text{supp } a_{i,k-1} \subseteq B_{i,k-1}$; ② $\|a_{i,k-1}\|_{\infty} \leq 1/(\#B_{i,k-1})^{1/p}$; ③ $\sum_{m \in \mathbf{Z}} m^j a_{i,k-1}(m) = 0$, $0 \leq j \leq k-2$. 因而对 $m, l \in \mathbf{Z}$,

$$M(m) - M(m-l) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i (a_{i,k-1}(m) - a_{i,k-1}(m-l)) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i d_{i,k-1}^l(m).$$

易知 $d_{i,k-1}^l$ 满足类似于 ① ~ ③ 的性质, 如 ③, 只需考虑 $j=k-1$ 的情形, 由于 $\text{supp } a_{i,k-1} \subseteq B_{i,k-1}$ 此时,

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}} \mu_i (a_{i,k-1}(m) - a_{i,k-1}(m-l)) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} a_{i,k-1}(m) m^{k-1} - \sum_{m \in \mathbf{Z}} a_{i,k-1}(m-l) (m-l+l)^{k-1} = 0$$

由于 $B_k(y)$ 非负, 结合上式和引理 5, 即可得到所需分解, 证毕.

定理 3 设 $0 < p \leq 1$, 则 $a \in H_{at}^p(\mathbf{Z})$ 当且仅当存在 (p, q, s_0, ϵ) 分子 $\{M_i\}_{i=0}^{\infty}$ 使得 $a(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i M_i(n)$, 其中 M_i 的分子模一致有界且 $\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p \leq c \|a\|_{H_{at}^p(\mathbf{Z})}^p$, 进一步, 有 $\|a\|_{H_{at}^p(\mathbf{Z})} = \inf \left\{ \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p \right)^{1/p} \text{ 对所有分解 } a = \sum \lambda_i M_i \right\}$.

定理 4 (1) 设 $0 < p \leq 1$, 则 H^d 是 $H^p(\mathbf{Z})$ 到 $l^p(\mathbf{Z})$ 有界的; (2) 设 $1/2 < p \leq 1$, 则 H^d 是 $l^p(\mathbf{Z})$ 到 $l^p(\mathbf{Z})$ 有界的; (3) 设 $0 < p \leq 1$, 则 $\|\sup_{p \in \mathbf{Z}} p_i^d * a\|_{H^p(\mathbf{Z})} \leq c \|a\|_{H^p(\mathbf{Z})}$.

证明 (1) 设 a 是 (p, ∞, s_0) 原子, 则

$$\|H^d a\|_p \leq c \left(\|a\|_p + \left\| \sup_{t \in \mathbb{Z}} p_t^d * a \right\|_p \right) \leq c.$$

一般地, $a = \sum \lambda_j a_j$, a_j 是 (p, ∞, s_0) 原子, 且 $\sum \|\lambda_j\|_p \leq 2 \|a\|_{H^p(\mathbb{Z})}$, 则

$$\|H^d a\|_p \leq c \sum \|\lambda_j\|_p \leq c \|a\|_{H^p(\mathbb{Z})}$$

(2) 与(3)的证明方法与 $\mathbf{R}^n$ 上的情形相似, 此略. 但要注意到:

$$H_{Hilb}^p(\mathbb{Z}) = H_{\max}^p(\mathbb{Z}) = H_{at}^p(\mathbb{Z}) = H^{p, q, s_0}(\mathbb{Z})$$

致谢: 作者衷心感谢导师邓东皋教授的悉心指导.

参考文献:

- [1] COIFMAN R R, WEISS G. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis[J]. Bull Amer Math Soc, 1977, 83: 569 ~ 645
- [2] ROFF C M. The discrete nature of the Paley-Wiener spaces[J]. Proc Amer Math Soc, 1995, 123: 505 ~ 512.
- [3] SUN Q. Sequence spaces and stability of integer translates[J]. Z Anal Anwendungen, 1993(12): 567 ~ 584.
- [4] BOZA S, CARRO M J. Discrete Hardy spaces[J]. Studia Math, 1998, 129: 31 ~ 50.
- [5] TAIBLESON M H, WEISS G. The molecular characterization of certain Hardy spaces[J]. Asterisque, 1980, 77: 67 ~ 151.
- [6] PLANCHEREL M, POLYA G. Fonctions entieres et integrales de Fourier multiples Comment[J]. Math Helv, 1937, 10: 110 ~ 163.
- [7] AUSCHER P, CARRO M J. On relations between operators on $\mathbf{R}^N$, $\mathbf{T}^N$, and $\mathbf{R}^N$ [J]. Studia Math, 1992(10): 165 ~ 182.
- [8] 邱道文. 齐型空间上的 Hardy 类, $T(1)$ 定理及交换子的有界性和紧性[J]. 广州: 中山大学数学系, 1999. 1 ~ 205.

Molecular Characterization of Some Hardy Spaces

QIU Dao-wen^{*}

Abstract: Based on several kinds of discrete Hardy spaces which are equivalent with each other, the author discusses their decomposition of atoms. It is shown that they are equivalent to the definition of Hardy spaces. The definition of molecule and the characterization Theorem are also given. Some of the ideas of the paper are novel.

Keywords: Hardy spaces; atoms; molecules; discrete Hilbert transformation

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China